Facharbeit

aus dem Fach

Mathematik

Thema:

„Wahrscheinlichkeitsrechnung beim Schafkopf“

Inhalt

1. Ziel der Facharbeit / Einführung

Viele populäre Spiele lassen sich in Denkspiele (z.B. Schach) und reine Glücksspiele (z.B. Roulette, Lotto) unterteilen. Die meisten Spiele der heutigen Zeit jedoch bestehen aus beiden Komponenten.
Eben dies gilt auch für das bayerische Spiel „Schafkopf“. Die Kartenkombination, die man erhält, ist unter normalen Umständen, sofern kein Falschspieler am Tisch sitzt, vom Zufall abhängig. Was jedoch jeder Einzelne aus seinem „Blatt“ macht, hängt von der Denkleistung, der Kombinationsgabe und der Taktik des Spielers ab.
So gibt es für jede Kartenkombination eine bestmögliche Spielvariante und ein bestmögliches Spielergebnis.
Somit könnte es unter Umständen als ein Erfolg gewertet werden, mit sehr schlechten Karten einen Stich gemacht zu haben, um ein „schneider-schwarz“ zu verhindern. Dies hätte nämlich eine Verdopplung des Spielpreises zur Folge.

In dieser Facharbeit soll nun der Zufall beim Schafkopf etwas „unter die Lupe“ genommen werden: Als erfahrener Schafkopf-Spieler hat man, aufgrund der großen Anzahl absolvierter Spielrunden, ein Gefühl für die Wahrscheinlichkeiten bestimmter Ereignisse und agiert daher oft intuitiv richtig.
Doch die wenigsten Spieler sehen den Zusammenhang zur Mathematik und die Möglichkeit dieses „Gefühl“ in konkreten Zahlen ausdrücken zu können.

Deshalb werden im Folgenden, mit möglichst verschiedenen mathematischen Verfahren (z.B. Erwartungswert, Standardabweichung, etc.), informative Aussagen über die Wahrscheinlichkeit bestimmter Ereignisse (z.B. Gewinn des Spiels) getroffen.

Anhand einzelner Spielsituationen soll gezeigt werden, daß die Stochastik beim Schafkopf, ähnlich wie bei anderen Kartenspielen, eine wichtige Rolle spielt und, daß deren Kenntnis zu größerem Erfolg beim Spiel führen kann.

Die gesamte Facharbeit bezieht sich ausschließlich auf die bayerische Variante des Schafkopfs mit 32 Spielkarten. Die Kenntnis der Regel wird vorausgesetzt. Spezielle Spielvarianten werden an entsprechender Stelle erklärt.

2. Grundlegende Überlegungen und Berechnungen

2.1. Kartengeben als Laplace-Experiment

Für die weitere Berechnung von Wahrscheinlichkeiten muß vorausgesetzt werden, daß es sich bei den Kartenverteilungen ausschließlich um Laplace-Experimente handelt.

Ein Laplace-Experiment ist wie folgt definiert:

„Ein Zufallsexperiment heißt Laplace-Experiment, wenn alle Ergebnisse des zugehörigen Ergebnisraumes gleichwahrscheinlich sind.“

(Mathematische Formeln und Definitionen, S. 107)

Werden die 32 (nicht gezinkten) Spielkarten eines Schafkopfspieles gut gemischt und dann gleichmäßig an alle vier Mitspieler verteilt, so sind alle möglichen Kartenverteilungen gleichwahrscheinlich.

Damit handelt es sich um ein Laplace-Experiment.

Die Art und Weise wie die Karten ausgeteilt werden, also ob 2 mal 4 Karten oder 1 mal 8 Karten verteilt werden, ist für die Rechnungen unbedeutend.

2.2. Möglichkeiten der Kartenverteilung

Jeder der 4 Spieler erhält 8 der insgesamt 32 Spielkarten. Damit gibt es

$$|\Omega| = \binom{32}{8} = \underline{\underline{10518300}}$$

verschiedene Möglichkeiten für das eigene „Blatt".
Die Reihenfolge in der man die Karten erhält muß nicht berücksichtigt werden, da es unerheblich ist, ob man eine Karte als Erste oder als Letzte erhält.

Neben den Möglichkeiten für die eigenen Karten, kann man auch die Anzahl der Kartenverteilungen insgesamt berechnen. Das heißt, es werden auch die Karten der 3 anderen Mitspieler berücksichtigt. Damit ergibt sich dann die riesige Anzahl von

$$|\Omega| = \binom{32}{8} \cdot \binom{24}{8} \cdot \binom{16}{8} \cdot \binom{8}{8} = \underline{\underline{99561092450391000}}$$

möglichen Kartenverteilungen.

Für die Berechnung der folgenden Wahrscheinlichkeiten ist diese Mächtigkeit von Omega allerdings nicht von Bedeutung, da sich die berechneten Wahrscheinlichkeiten immer nur auf die eigenen Karten, das eigene „Blatt", beschränken.

2.3. Wahrscheinlichkeit für ein bestimmtes Blatt

Da es sich beim Kartengeben um ein Laplace-Experiment handelt (Kapitel 2.1.), darf man die Wahrscheinlichkeit für ein Ereignis A wie folgt berechnen:

$$P(A) = \frac{\text{Anzahl der für } A \text{ günstigen Ergebnisse}}{\text{Anzahl der mögl. gleichwahrscheinlichen Ergebnisse}}$$

(Mathematische Formeln und Definitionen, S. 107)

Die Wahrscheinlichkeit für das Ereignis ein bestimmtes Blatt, z.B. einen „Sie“ (alle Ober und Unter), zu bekommen, ist nun eine der oben berechneten 10518300 Möglichkeiten:

$$P\,(\text{"}Sie\text{"}) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{1}{10518300} \approx \underline{\underline{0{,}00000951\,\%}}$$

Somit ist die Wahrscheinlichkeit für dieses „Traumblatt“ ebenso groß, wie die für jedes beliebige andere „unspektakuläre“ Blatt (z.B. Eichel 7, Gras 8, Schellen 9, Gras 10, Eichel-As, Herz-König, Eichel-Unter und Schellen-Ober).

3. Die Wahrscheinlichkeit für „Trümpfe“

3.1. Einführung

Jeder der 4 Mitspieler erhält zu Beginn eines jeden Spieles 8 der insgesamt 32 Spielkarten.
Geht man vom regulären Rufspiel aus, so befinden sich unter den 32 Karten
14 Trümpfe: 4 Ober, 4 Unter, und 6 weitere Herzkarten (As, 10, König, 9, 8, 7).

Wie groß ist nun die Wahrscheinlichkeit z.B. genau 6 Trümpfe zu bekommen?

3.2. Berechnung der Wahrscheinlichkeit

Die allgemeine Formel zur Berechnung einer Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses A lautet:

$$P\,(A) = \frac{Anzahl\ der\ \ f\ddot{u}r\ \ A\ g\ddot{u}nstigen\ Ergebnisse}{Anzahl\ der\ m\ddot{o}gl.\ gleichwahrscheinlichen\ Ergebnisse}$$

(Mathematische Formeln und Definitionen, S. 107)

Die Menge der möglichen Ergebnisse wurde schon in Kapitel 2.2. berechnet:

$$|\Omega| = \binom{32}{8} = \underline{\underline{10518300}}$$

Die Anzahl der günstigen Möglichkeiten um genau 6 Trümpfe zu bekommen ist:

$$|A| = \binom{14}{6} \cdot \binom{18}{2} = \underline{\underline{459459}}$$

(6 aus den 14 vorhandenen Trümpfen multipliziert mit 2 aus den restlichen 18 Karten.)

Die Wahrscheinlichkeit für 6 Trümpfe lautet damit:

$$P\left(\text{"}6\ \mathit{Trümpfe}\text{"}\right) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{\binom{14}{6}\binom{18}{2}}{\binom{32}{8}} \approx \underline{\underline{4{,}37\ \%}}$$

Ein Spieler hat, nachdem die Karten verteilt wurden, also mit einer Wahrscheinlichkeit von ca. 4,37 % (gerundet) sechs Trümpfe.

Natürlich kann man auch eine allgemeine Formel zur Berechnung dieser Wahrscheinlichkeiten angeben:

$$P\left(\text{"}n\ \mathit{Trümpfe}\text{"}\right) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{\binom{14}{n}\binom{18}{8-n}}{\binom{32}{8}} \qquad \mathit{für}\ n \in \mathbb{N} \wedge n \in [0;8]$$

Nun lassen sich die Wahrscheinlichkeiten für alle Trumpfanzahlen (0-8 Trümpfe) leicht ermitteln:

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8
≈ P (n Trümpfe) in %	0,416	4,24	16,1	29,7	29,1	15, 5	4,37	0,587	0,0286

Tabelle 1: Wahrscheinlichkeit n Trümpfe zu erhalten

4. Der Erwartungswert für die Anzahl der Trümpfe

4.1. Einführung

Die Anzahl der Trümpfe, die sich unter den 8 Spielkarten befinden ist für die Spieltaktik und somit für den Spielverlauf von großer Bedeutung.
Jeder Spieler wünscht sich natürlich eine möglichst große Anzahl von Trümpfen, da es mit steigender Trumpfzahl einfacher ist seine Mitspieler zu überstechen und somit wertvolle Punkte zu sammeln, die für ein erfolgreiches Spiel notwendig sind.
Nun stellt sich die Frage, mit wie vielen Trümpfen ein Spieler „zufrieden“ sein kann.
Anders: Mit wie vielen Trümpfen kann der Spieler durchschnittlich rechnen?
Mathematisch ausgedrückt: Wie hoch ist der Erwartungswert für die Trümpfe, die der Spieler erhält?

Um eine Antwort auf diese Frage zu finden, werden im Folgenden zwei verschiedene Lösungswege dargestellt.

4.2. Lösung mittels Überlegung

Ein einfacher und logischer Gedankengang führt schnell zum Ziel:

$$\frac{\textit{Anzahl Trümpfe insgesamt}}{\textit{Anzahl Spieler}} = \frac{14}{4} = \underline{\underline{3{,}5}}$$

Wären die insgesamt 14 Trümpfe (beim Rufspiel) gleichmäßig auf die 4 Spieler verteilt, so ergibt der Quotient aus den Trümpfen und den Spielern die Anzahl der Trumpfkarten.
Demnach muß jeder Spieler durchschnittlich 3,5 Trümpfe bekommen.

4.3. Lösung mittels Berechnung des Erwartungswertes

Neben dieser Überlegung führt aber auch ein mathematisch berechneter Erwartungswert zur gleichen Lösung.

Die Zufallsgröße „Anzahl der Trümpfe“ hat folgende Wahrscheinlichkeitsfunktion (vgl. Kapitel 3.2.):

x	0	1	2	3	4
W(x)	$\frac{\binom{14}{0}\binom{18}{8}}{\binom{32}{8}}$	$\frac{\binom{14}{1}\binom{18}{7}}{\binom{32}{8}}$	$\frac{\binom{14}{2}\binom{18}{6}}{\binom{32}{8}}$	$\frac{\binom{14}{3}\binom{18}{5}}{\binom{32}{8}}$	$\frac{\binom{14}{4}\binom{18}{4}}{\binom{32}{8}}$

x	5	6	7	8
W(x)	$\frac{\binom{14}{5}\binom{18}{3}}{\binom{32}{8}}$	$\frac{\binom{14}{6}\binom{18}{2}}{\binom{32}{8}}$	$\frac{\binom{14}{7}\binom{18}{1}}{\binom{32}{8}}$	$\frac{\binom{14}{8}\binom{18}{0}}{\binom{32}{8}}$

Tabelle 2: Wahrscheinlichkeitsfunktion der Zufallsgröße „Anzahl der Trümpfe“

Um den Erwartungswert zu ermitteln, muß man jede Zufallsgröße mit ihrer zugehörigen Wahrscheinlichkeit multiplizieren und diese Werte schließlich addieren:

$$E\ X = \sum_{i=1}^{n} x_i\ W(x_i)$$

(Mathematische Formeln und Definitionen, S. 108)

Für die Zufallsgröße „Anzahl der Trümpfe“ lautet er dann:

$$E(X)=\left(\frac{\binom{14}{0}\binom{18}{8}}{\binom{32}{8}}\cdot 0\right)+\left(\frac{\binom{14}{1}\binom{18}{7}}{\binom{32}{8}}\cdot 1\right)+\left(\frac{\binom{14}{2}\binom{18}{6}}{\binom{32}{8}}\cdot 2\right)+\left(\frac{\binom{14}{3}\binom{18}{5}}{\binom{32}{8}}\cdot 3\right)+\left(\frac{\binom{14}{4}\binom{18}{4}}{\binom{32}{8}}\cdot 4\right)+$$

$$\left(\frac{\binom{14}{5}\binom{18}{3}}{\binom{32}{8}}\cdot 5\right)+\left(\frac{\binom{14}{6}\binom{18}{2}}{\binom{32}{8}}\cdot 6\right)+\left(\frac{\binom{14}{7}\binom{18}{1}}{\binom{32}{8}}\cdot 7\right)+\left(\frac{\binom{14}{8}\binom{18}{0}}{\binom{32}{8}}\cdot 8\right)=$$

$$=\frac{1}{\binom{32}{8}}\cdot\begin{pmatrix}43758\cdot 0+445536\cdot 1+1689324\cdot 2+3118752\cdot 3+3063060\cdot 4+\\1633632\cdot 5+459459\cdot 6+61776\cdot 7+3003\cdot 8\end{pmatrix}=\underline{\underline{3{,}5}}$$

Der Erwartungswert für die Zufallsgröße „Anzahl der Trümpfe“ ist also 3,5.

4.4. Fazit

Die Berechnung des Erwartungswertes hat das Ergebnis der Überlegung bestätigt.
Verfolgt man also auf Dauer (d.h. bei einer großen Anzahl von Spielen) die Trumpfverteilung, so wird die mittlere Trumpfzahl eines Spielers in der Nähe dieses Erwartungswertes liegen.

4.5. Stabdiagramm

Um das oben gewonnene Ergebnis anschaulicher zu betrachten, kann es in Form eines Stabdiagramms dargestellt werden:

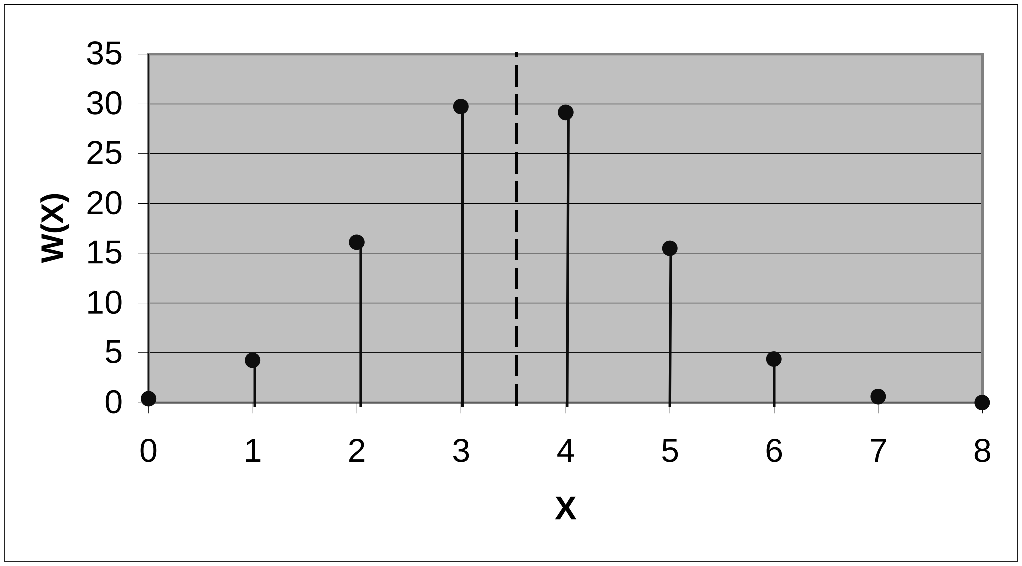

Diagramm 1: Stabdiagramm der Wahrscheinlichkeitsfunktion der Zufallsgröße „Anzahl der Trümpfe“ mit Erwartungswert

5. Varianz und Standardabweichung

5.1. Einführung

Im vorangegangenen Kapitel wurde der Erwartungswert für Trümpfe errechnet.

Bei einer sehr großen Anzahl von Spielen bekommt also jeder Spieler im Mittel ca. 3,5 Trümpfe.

Doch wie weit kann die wahre Trumpfanzahl von diesem Erwartungswert abweichen?

Im schlechtesten Fall bekommt ein Spieler überhaupt keinen Trumpf (also 0), im günstigsten Fall sind alle Karten Trümpfe (also 8).

Die mittlere Abweichung von dem Erwartungswert 3,5 läßt sich mit Hilfe der Standardabweichung berechnen.

5.2. Die Varianz der Zufallsgröße „Anzahl der Trümpfe“

Um die Standardabweichung ermitteln zu können ist es allerdings notwendig erst die Varianz der Zufallsgröße zu berechnen.

Sie lautet allgemein:

$$Var\ X = \left[E\left(X - EX\right)^2\right]$$

(Mathematische Formeln und Definitionen, S. 108)

Für die Zufallsgröße „Anzahl der Trümpfe“:

$$Var\left(X\right) = \frac{\binom{14}{0}\binom{18}{8}}{\binom{32}{8}} \cdot \left(0-3{,}5\right)^2 + \frac{\binom{14}{1}\binom{18}{7}}{\binom{32}{8}} \cdot \left(1-3{,}5\right)^2 + \frac{\binom{14}{2}\binom{18}{6}}{\binom{32}{8}} \cdot \left(2-3{,}5\right)^2 + \frac{\binom{14}{3}\binom{18}{5}}{\binom{32}{8}} \cdot \left(3-3{,}5\right)^2 +$$
$$\frac{\binom{14}{4}\binom{18}{4}}{\binom{32}{8}} \cdot \left(4-3{,}5\right)^2 + \frac{\binom{14}{5}\binom{18}{3}}{\binom{32}{8}} \cdot \left(5-3{,}5\right)^2 + \frac{\binom{14}{6}\binom{18}{2}}{\binom{32}{8}} \cdot \left(6-3{,}5\right)^2 + \frac{\binom{14}{7}\binom{18}{1}}{\binom{32}{8}} \cdot \left(7-3{,}5\right)^2 +$$
$$\frac{\binom{14}{8}\binom{18}{0}}{\binom{32}{8}} \cdot \left(8-3{,}5\right)^2 =$$

$$= \frac{1}{\binom{32}{8}} \cdot \begin{pmatrix} 43758 \cdot 12{,}25 + 445536 \cdot 6{,}25 + 1689324 \cdot 2{,}25 + 3118752 \cdot 0{,}25 + 3063060 \cdot 0{,}25 \\ + 1633632 \cdot 2{,}25 + 459459 \cdot 6{,}25 + 61776 \cdot 12{,}25 + 3003 \cdot 20{,}25 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{\binom{32}{8}} \cdot 16031925 \approx \underline{\underline{1{,}52}}$$

5.3. Die Standardabweichung der Zufallsgröße „Anzahl der Trümpfe“

Die Standardabweichung ergibt sich aus der Quadratwurzel der Varianz:

$$\sigma = \sqrt{Var\ X}$$

(Mathematische Formeln und Definitionen, S. 108)

Für die Zufallsgröße „Anzahl der Trümpfe“:

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{\binom{32}{8}} \cdot 16031925} \approx \underline{\underline{1{,}23}}$$

5.4. Fazit

Die Rechnung hat eine Standardabweichung von ca. 1,23 ergeben, die ein Maß für das Streuen der Werte dieser Zufallsgröße ist. Bei einer großen Anzahl von Spielen wird die mittlere Abweichung vom Erwartungswert 3,5 also ungefähr 1,23 betragen.

6. Restrisiko beim „Tout“-Spiel

6.1. Einführung

Erhält ein Spieler viele Trümpfe und entschließt sich zu einem Einzelspiel (z.B. Solo, Wenz, Farbwenz), so steht er bei einem solch guten Blatt vor der Frage, ob er das Spiel „Tout“ ansagen soll, da sich der Gewinn dann verdoppelt. Bei einem „Tout“ dürfen die Gegenspieler keinen einzigen Stich machen, andernfalls ist das Spiel verloren.
Ein Spieler, der ein Einzelspiel „Tout“ ansagt, hat in der Regel sehr gute Karten. Doch auch hier bleibt natürlich ein Restrisiko das Spiel zu verlieren, das oft davon abhängt, wie die restlichen Trümpfe an die Gegenspieler verteilt sind. Eine gleichmäßige Verteilung ist für den „Tout“-Spieler besser, da er den Gegnern dann mehr Trümpfe „ziehen“ kann.
Mit welcher Wahrscheinlichkeit kann man nun „Tout“-Spiele gewinnen?

Da sich dazu kaum allgemeine Berechnungen durchführen lassen, wird im Folgenden an zwei Beispielen gezeigt, ob sich das Ansagen eines Tout-Spiels sinnvoll ist.

Um darzulegen, wie hoch das Restrisiko bei einen Tout-Spielen ist, müssen bei den nachfolgenden Berechnungen folgende drei Prämissen gelten:

1. Jeder Spieler spielt regelkonform und die für ihn beste Karte aus!
2. Der Tout-Spieler spielt immer die erste Karte aus!
3. Die Taktik ist es, die Laufenden der Reihe nach auszuspielen, um den Gegnern die Trümpfe aus der Hand zu ziehen!

6.2. „Sie“, nur Herz-Ober fehlt

Ein Spieler erhält alle Ober und Unter außer dem dritt höchsten Trumpf, dem Herz-Ober. Er wird ein Farb-Solo spielen und die Farbe der Karte, die er statt des Herz-Obers bekommt zu Trumpf erklären. (Beispiel: Erhält er einen Schellen-König, so wird er ein Schellen-Solo spielen.)

Auf die drei Gegenspieler sind somit 6 Trümpfe verteilt.

Um das Spiel „Tout“ zu gewinnen, darf der Gegenspieler, der den Herz-Ober besitzt, höchstens einen weiteren Trumpf haben. Hat er mehr, so kann er einen Stich machen und das Solo-Tout-Spiel ist verloren.

Anzahl der für A:= „Spieler A hat den Herz-Ober und höchstens einen weiteren Trumpf“ günstigen Fälle:

I. $$|A_1| = \binom{1}{1}\binom{5}{0}\binom{18}{7} = \underline{\underline{31824}}$$

(Herz-Ober und keinen weiteren Trumpf für den Gegenspieler. Zusätzlich noch 7 aus den verbleibenden 18 Karten.)

II. $$|A_2| = \binom{1}{1}\binom{5}{1}\binom{18}{6} = \underline{\underline{92820}}$$

(Herz-Ober und einen weiteren Trumpf für den Gegenspieler. Zusätzlich noch 7 aus den verbleibenden 18 Karten.)

In beiden Fällen der Kartenverteilung gewinnt der Einzelspieler sein Solo „Tout“.

Die Anzahl der möglichen Fälle ist:

$$|\Omega| = \binom{24}{8} = \underline{\underline{735471}}$$

(8 aus den verbleibenden 24 Spielkarten der drei Gegenspieler.)

Die Wahrscheinlichkeit dafür, daß der Besitzer des Herz-Obers höchstens eine weitere Trumpfkarte hat, ist somit:

A:= „Spieler A hat den Herz-Ober und höchstens einen weiteren Trumpf“

$$P\left(A\right) = \frac{\left(|A_1| + |A_2|\right)}{|\Omega|} = \frac{31824 + 92820}{735471} \approx \underline{\underline{16{,}9\ \%}}$$

Da es allerdings nicht nur einen, sondern 3 Gegenspieler gibt, die den Herz-Ober haben könnten, muß, um die richtige Wahrscheinlichkeit zu finden, eine Vereinigungsmenge gebildet werden:

B:= „Spieler B hat den Herz-Ober und höchstens einen weiteren Trumpf“
C:= „Spieler C hat den Herz-Ober und höchstens einen weiteren Trumpf“

$$P\left("Solo - Tout\ gewinnen"\right) = P\left(A \cup B \cup C\right)$$

Hierzu benötigt man den Satz von Sylvester. Er lautet:

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} E_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P\left(E_i\right) - \sum_{i<j}^{n} P\left(E_i \cap E_j\right) + \sum_{i<j<k}^{n} P\left(E_i \cap E_j \cap E_k\right) - \ldots + (-1)^{n-1} P\left(E_1 \cap E_2 \cap \ldots \cap E_n\right)$$

(Mathematische Formeln und Definitionen, S. 106)

Für den Sonderfall n = 3:

$$P\left(A\cup B\cup C\right)=P\left(A\right)+P\left(B\right)+P\left(C\right)-P\left(A\cap B\right)-P\left(A\cap C\right)-P\left(B\cap C\right)+P\left(A\cap B\cap C\right)$$

Da aber immer nur ein Spieler den Herz-Ober haben kann, sind die Ereignisse A, B und C paarweise unvereinbar. Die Letzten 4 Summanden sind also gleich 0. Sie entfallen.

Die Vereinigungsmenge ist dann:

$$P(A\cup B\cup C)=P(A)+P(B)+P(C)$$

Die oben für den Spieler A berechnete Wahrscheinlichkeit ist für die Spieler B und C gleich groß.

Die Wahrscheinlichkeit das Solo „Tout“ zu gewinnen ist damit:

$$Da\ P\left(A\right)=P\left(B\right)=P\left(C\right),$$

$$P\left(\text{"}Solo-Tout\ gewinnen\text{"}\right)=3\cdot P\left(A\right)=3\cdot\frac{31824+92820}{735471}\approx\underline{\underline{50{,}8\ \%}}$$

Die Wahrscheinlichkeit ein solches Solo zu gewinnen, ist mit 50,8 % nur sehr wenig höher, als es zu verlieren. Konsequenterweise müßte sich der Solo-Spieler trotzdem für das „Tout“-Spiel entscheiden und dieses hohe Risiko eingehen.

6.3. Haus-Wenz mit 2 Unter

Im folgenden Beispiel erhält ein Spieler neben dem Eichel-Unter und Schellen-Unter, noch mehrere sehr hohe Farbkarten (z.B. Eichel-As, Eichel 10, Eichel König, Schellen-As, Schellen 10, Gras-As). Welche Farbkarten er genau erhält ist für die Folgende Rechnung unbedeutend, denn der Spieler entscheidet sich einen Haus-Wenz zu spielen.
Somit gibt es nicht 14, sondern nur 4 Trümpfe (die 4 Unter). Die Ober stehen in ihrer Wertigkeit dann zwischen König und 9 und werden, ebenso wie die Herz-Karten, als normale Farbkarten und nicht als Trümpfe betrachtet.

Entscheidend für den Erfolg des Tout-Spiels ist nun die Verteilung der Unter. Sind der Gras- und der Herz-Unter auf zwei verschiedene Gegenspieler verteilt, so kann der Spieler beide Gegentrümpfe mit seinen Eichel-Unter „ziehen“ und das Spiel gewinnen. Befinden sich die fehlenden Unter in der Hand eines einzigen Gegners, so kann dieser mit einem Unter einen Stich machen. Das „Tout“-Spiel wäre verloren.
Im Folgenden wird die Gewinnwahrscheinlichkeit über das Gegenereignis berechnet:

G:= „Gegenspieler G hat beide gegnerischen Unter“

$$|G| = \binom{2}{2}\binom{22}{6}$$

(2 der 2 Unter für den Gegenspieler, zusätzlich noch 6 aus den restlichen 22 Karten.)

Die Wahrscheinlichkeit für G ergibt sich dann als:

$$P\left(G\right) = 3 \cdot \frac{\binom{2}{2}\binom{22}{6}}{\binom{24}{8}} \approx \underline{\underline{30{,}4\ \%}}$$

Ebenso wie beim „Sie“ ohne Herz-Ober muß auch diese Wahrscheinlichkeit mit 3 multipliziert werden, da jeder Gegenspieler beide Unter haben könnte (vgl. Kapitel 6.2.).

Somit hat also ein Gegner mit einer Wahrscheinlichkeit von ca. 30,4 % beide Unter. Dies ist der für den Tout-Spieler negative Fall. Das Gegenereignis ist, daß die Unter getrennt sind. Damit ist auch der Gewinn des Spiels verbunden:

$$P\left(\text{"}Tout - Spiel\ \ gewinnen\text{"}\right) \approx 1 - 0{,}304 \approx \underline{\underline{69{,}6\ \%}}$$

Das Tout-Spiel wird also zu 69,6 % gewonnen.

7. Zusammenfassung / Schlußwort

Es war mir leider nur möglich einen sehr kleinen Einblick in die „Wahrscheinlichkeitsrechnung beim Schafkopf“ zu geben. Bei der Vielzahl von Spielvarianten und Sonderfällen mußte ich mich auf die Bearbeitung unkomplizierter Beispiele beschränken. Auch die Suche nach allgemeinen Formeln für die Wahrscheinlichkeit bestimmter Ereignisse gestaltete sich schwierig, da mir hier die „individuelle Spieltaktik“ sprichwörtlich einen Strich durch die Rechnung machte.
Es erstaunte mich, daß bei einem doch recht bekannten und beliebten Kartenspiel, wie Schafkopf, nur sehr wenig passende Literatur existiert. Bis auf Wolfgang Peschels „Gewinnen beim Schaffkopf“ beschränken sich fast alle Bücher auf reine Regelerläuterungen und wenige Spieltips, die aber auch schon weniger erfahrene Spieler längst kennen (z.B. als Spieler immer Trumpf spielen).
Literatur, die darüber hinausgeht ist nicht vorhanden.
Auch nach längerer Suche nach einem Buch, das Schafkopfen mit der Mathematik verbindet, wurde ich leider nicht fündig. Letztlich arbeitete ich hauptsächlich mit dem Schulbuch und der Formelsammlung.

Da ich selbst gerne und regelmäßig Schafkopf spiele, hat mich das Thema von Anfang an interessiert. Ich konnte mich leicht in die Materie einarbeiten und hatte in Hinblick auf die Weiterentwicklung meiner Spielweise ein Eigeninteresse an der Berechnung der Wahrscheinlichkeiten, da man ja evtl. auch selbst einmal in die entsprechende Spielsituation kommt. Mit den Erkenntnissen dieser Facharbeit kann ich nun auf eine Verbesserung meiner Spielweise und somit höhere Gewinne hoffen.

8. Literaturverzeichnis

(1) K. Bosch
Lotto und andere Zufälle
Oldenburg Verlag

(2) Barth / Mühlbauer / Nikol / Wörle
Mathematische Formeln und Definitionen
Bayerischer Schulbuch-Verlag und J. Lindauer Verlag

(3) F. Barth / R. Haller
Stochastik Leistungskurs
Ehrenwirth Verlag

(4) W. Peschel
Gewinnen beim Schaffkopf
Rau Verlag

(5) A. Müller
Abitur Training Stochastik – Mathematik Leistungskurs
Stark Verlag